BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

К ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.Я.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе изучается общий случай отображения p-мерных (1<p<n-1) поверхностей n-мерных евклидовых пространств. Работа выполнена методом внешних форм Э. Картана и метод продолжения и охвата Г.Ф. Лаптева.

Рассмотрим евклидовы пространства E_n и $\overline{E}_n$, как вполне ортогональные подпространства в собственно евклидовом пространстве E_{2n}, имеющие единственную общую точку O.

Пусть V_p и $\overline{V}_p$ – гладкие поверхности в E_n и $\overline{E}_n$ соответственно. Изучаем дифференцируемое взаимнооднозначное отображение $T: V_p \to \overline{V}_p$, которое переводит область $\Omega \subset V_p$ в некоторую область $\overline{\Omega} \subset \overline{V}_p$. Если точка x_1 описывает область Ω, то точка $x_2 = T(x_1)$ описывает область $\overline{\Omega} \subset \overline{V}_p$. Точка x с радиус-вектором $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 = \overrightarrow{Ox_1}$, $\vec{x}_2 = \overrightarrow{Ox_2}$, опишет область Ω^* поверхности V_p^*, называемую графиком отображения T [1]. Подробный обзор и основные результаты, полученные в этом направлении, приведены в работе Рыжкова В.В. [4]. В работе Базылева В.Т. [1,2] рассматриваются соответствия евклидовых n-мерных пространств.

Пусть $R_1 = \{x_1, \vec{\ell}_i, \vec{\ell}_\alpha\}$, $R_2 = \{x_2, \vec{\ell}_{n+i}, \vec{\ell}_{n+\alpha}\}$ (здесь и в дальнейшем $i, j, k, \ell, s = \overline{1, p}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{p+1, n}$). Соответствующие подвижные реперы в E_n и $\overline{E}_n$, причем $\vec{\ell}_i \in T_p(x_1), \quad (dT)_{x_i}(\vec{\ell}_i) = \vec{\ell}_{n+i} \in T_p(x_2); \quad T_p(x_1), T_p(x_2)$ - касательные плоскости к поверхностям V_p, $\overline{V}_p$ соответственно, в соответствующих точках x_1, x_2; $\vec{\ell}_\alpha$ и $\vec{\ell}_{n+\alpha}$ составляют ортонормированные базисы ортогональных дополнений к $T_p(x_1), T_p(x_2)$ соответственно в пространствах E_n и $\overline{E}_n$.

В точке $x \in V_p^*$ возникает репер $R = \{x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{p+i}, \vec{\varepsilon}_{p+\alpha}, \vec{\varepsilon}_{n+\alpha},\}$, где $\vec{\varepsilon}_i = \vec{\ell}_i + \vec{\ell}_{p+i}$, $\vec{\varepsilon}_{p+i} = \vec{\ell}_i - \gamma_{ij}\gamma^{sj}\vec{\ell}_{n+j}$, $\vec{\varepsilon}_{p+\alpha} = \vec{\ell}_\alpha$, $\vec{\varepsilon}_{n+\alpha} = \vec{\ell}_{n+\alpha}$, $\vec{\varepsilon}_i \in T_p(x_1)$, а $\gamma_{ij}, \overline{\gamma}_{ij}$ - метрические тензоры поверхностей V_p и $\overline{V}_p$ соответственно.

Деривационные формулы этих реперов имеют вид

$$d\vec{x}_1 = \omega^i \vec{\ell}_i, d\vec{\ell}_i = \omega_i^j \vec{\ell}_j + \omega_i^\alpha \vec{\ell}_\alpha, d\vec{\ell}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{\ell}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{\ell}_\beta, \tag{1}$$

$$d\vec{x}_2 = \varpi^i \vec{\ell}_{n+i}, d\vec{\ell}_{n+i} = \varpi_i^j \vec{\ell}_{n+j} + \varpi_i^\alpha \vec{\ell}_{n+\alpha}, d\vec{\ell}_{n+\alpha} = \varpi_\alpha^i \vec{\ell}_{n+\alpha} + \varpi_\alpha^\beta \vec{\ell}_{n+\beta}, \tag{2}$$

$$d\vec{x} = \theta^i \vec{\varepsilon}_i, d\vec{\varepsilon}_i = \theta_i^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_i^{p+j}\vec{\varepsilon}_{p+j} + \theta_i^{p+\alpha}\vec{\varepsilon}_{p+\alpha} + \theta_i^{n+\alpha}\vec{\varepsilon}_{n+\alpha}, \tag{3}$$

$$d\vec{\varepsilon}_{p+i} = \theta_{p+i}^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_{p+i}^{p+j}\vec{\varepsilon}_{p+j} + \theta_{p+i}^{p+\alpha}\vec{\varepsilon}_{p+\alpha} + \theta_{p+i}^{n+\alpha}\vec{\varepsilon}_{p+\alpha}, \tag{4}$$

$$d\vec{\varepsilon}_{p+\alpha} = \theta_{p+\alpha}^i \vec{\varepsilon}_i + \theta_{p+\alpha}^{p+i}\vec{\varepsilon}_{p+i} + \theta_{p+\alpha}^{p+\beta}\varepsilon_{p+\beta}, \tag{5}$$

$$d\vec{\varepsilon}_{n+\alpha} = \theta_{n+\alpha}^i \vec{\varepsilon}_i + \theta_{n+\alpha}^{p+i}\vec{\varepsilon}_{p+i} + \theta_{n+\alpha}^{n+\beta}\varepsilon_{n+\beta}. \tag{6}$$

Реперы R_1, R_2 и R согласованы, что приводит к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\omega^i = \overline{\omega}^i = \theta^i, \omega_i^j = a_{ij}^\alpha \omega^i, a_{ij}^\alpha = a_{ji}^\alpha, \omega^\alpha = 0, \tag{7}$$

$$\overline{\omega}^\alpha = 0, \overline{\omega}_i^\alpha = b_{ij}\omega^j, b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \theta^{p+i} = 0, \tag{8}$$

$$\theta^{p+\alpha} = 0, \quad \theta^{n+\alpha} = 0, \theta_k^{p+i} = C_{kj}^{p+i}\theta^j, C_{kj}^{p+i} = C_{jk}^{p+i}, \tag{9}$$

$$\theta_k^{p+\alpha} = C_{kj}^{p+\alpha}\theta^j, C_{kj}^{p+\alpha} = C_{jk}^{p+\alpha}, \theta_k^{n+\alpha} = C_{kj}^{n+\alpha}\theta^j, C_{kj}^{n+\alpha} = C_{jk}^{n+\alpha}, \tag{10}$$

$$\omega_i^j = \theta_i^j + \theta_i^{p+j}, \omega_i^\alpha = \theta_i^{p+\alpha}, \overline{\omega}_i^j = \theta_i^j - \theta_i^{p+k}\gamma_{ks}\overline{\gamma}^{si}, \tag{11}$$

$$\overline{\omega}_i^\alpha = \theta_i^{n+\alpha}, \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \overline{\omega}_\alpha^\beta + \overline{\omega}_\beta^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{12}$$

Пусть среди $2n - p$ квадратичных форм $\phi^{p+k}, \phi^{p+\alpha}, \phi^{n+\alpha}$ поверхности V_p^* формы ϕ^{n+i} $\left(i = \overline{1,k}\right)$ линейно независимы. Тогда имеем

$$\phi^{p+k} = \lambda_i^{p+k}\phi^{n+i}, \tag{13}$$

$$\phi^{n+\alpha} = \lambda_i^{n+\alpha}\phi^{n+i}, \tag{14}$$

$$\phi^{p+\sigma} = \lambda_i^{p+\sigma}\phi^{n+i} \ (\sigma = \overline{p + p + 1, n}).$$

Следовательно, главные нормали поверхности V_p и $\overline{V}_p$ $p-$ мерные. Направим векторы $\overrightarrow{e_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{e_{2p}}$ по главной нормали поверхности $\overline{V}_p$, тогда

$$a_{ij}^\sigma = 0, \ b_{ij}^\sigma = 0. \tag{15}$$

Следовательно

$$\phi^{n+p+\sigma} \equiv 0, \ \phi^{p+\sigma} \equiv 0. \tag{16}$$

Итак, вместо условия (14) мы получим следующее

$$\phi^{n+p+k} = \lambda_i^{n+p+k}\phi^{n+i}. \qquad (18)$$

Понятно, что $\det\left\|\lambda_i^{n+p+k}\right\| \neq 0$. Условие линейной зависимости квадратичных асимптотических форм ϕ^{p+k} выражается равенством

$$\det\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| \neq 0. \qquad (19)$$

Найдем геометрическое истолкование условия (19). Находим

$$d^2\vec{x} = (d\theta^i + \theta^i\theta^i_j)\vec{\varepsilon}_i + \phi^{n+i}(\lambda_i^{p+k}\vec{\varepsilon}_{p+k} + \vec{\varepsilon}_{2p+i} + \lambda_i^{n+p+k}\varepsilon_{n+p+k}).$$

Обозначим

$$\vec{c}_i = \lambda_i^{p+k}\vec{\varepsilon}_{p+k} + \vec{\varepsilon}_{2p+i} + \lambda_i^{n+p+k}\vec{\varepsilon}_{n+p+k}.$$

Векторы $\vec{C}_i$ образуют базис p – мерной главной нормали поверхности V_p^*. Обозначим эту плоскость через $N_p^*(x) = \left[x, \vec{c}_i\right]$.

Находим ортогональную проекцию плоскости $N_p^*(x)$ на E_n и $\overline{E}_n$ соответственно:

$$np_{E_n}N_P^*(x) = \widetilde{N}_P(x_1) = \left[x_1, \vec{a}_i\right],$$
$$np_{\overline{E}_n}N_P^*(x) = \widetilde{N}_P(x_1) = \left[x_2, \vec{b}_i\right],$$

где

$$\vec{a}_i = \lambda_i^{p+k}\vec{e}_k + \vec{e}_{p+i}, \quad \vec{b}_i = -\lambda_i^{p+k}\gamma_{ks}\gamma^{-sj}\vec{e}_{n+j} + \lambda_i^{n+p+k}\vec{e}_{n+p+k}.$$

Учитывая, что $\det\left\|a_{ii}^{p+s}\right\| \neq 0$, значения λ_i^{p+k} и λ_i^{n+p+k} находятся из следующих соотношений

$$C_{ij}^{p+k} = \lambda_s^{p+k}a_{ij}^{p+s}, \; b_{ij}^{p+k} = \lambda_s^{n+p+k}a_{ij}^{p+s} \qquad (20)$$

Рассмотрим взаимное положение плоскостей $N_p(x_1)$ и $\widetilde{N}_p(x_1)$. Эти плоскости имеют общую точку. Если эти плоскости имеют общую прямую, то $x^i\vec{e}_{p+i} = y^i\vec{a}_i$. Отсюда получим систему уравнений

$$x^i\lambda_i^{p+k} = 0. \qquad (21)$$

Для того чтобы это система уравнений имела ненулевое решение, должно выполняться

$$\det\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| = 0.$$

Предположим, что $rang\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| = p-1$. В этом случае уравнение (21) допускает решение вида

$$x^i = a^i x^{i_0} \; (i \neq i_0). \qquad (22)$$

Следовательно, плоскости $N_p(x_1)$ и $\widetilde{N}_p(x_1)$ пересекаются по прямой. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Квадратичные формы* ϕ^{p+k} *поверхности* V_p^* *будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда плоскости* $N_p(x_1)$ *и* $\widetilde{N}_p(x_1)$ *имеют хотя бы одну общую прямую.*

Нетрудно доказать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Плоскости* $N_p(x_1)$ *и* $\widetilde{N}_p(x_1)$ *имеют* $p-r$ *мерное пересечение тогда и только тогда, когда* $rang\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| = r$.

Рассмотрим взаимное расположение плоскостей $N_p(x_2)$ и $\widetilde{N}_p(x_2)$. Пусть вектор $\vec{m}$ есть общий вектор этих плоскостей. Тогда имеем, $y^i\vec{b}_i = x^k\vec{e}_{n+p+k}$. Отсюда получаем систему уравнений:

$$y^i\lambda_i^{n+p+k} = x^k, \quad y^i\lambda_i^{p+k}\gamma_{ks}\bar{\gamma}^{sj} = 0\,.$$

Из второго уравнения системы получаем

$$y^i\lambda_i^{p+k} = 0\,. \tag{23}$$

У нас $\det\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| = 0$, следовательно, уравнения (23) имеют ненулевые решения.

Если $rang\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| = p-1$, то получим, что

$$y^i = a^i y^{i_0} \quad (i \neq i_0)\,.$$

В этом случае

$$x^k = y^{i_0}(\lambda_{i_0}^{n+p+k} + a^i\lambda_i^{n+p+k}) \quad (i \neq i_0)\,.$$

Следовательно, плоскости $N_p(x_2)$ и $\widetilde{N}_p(x_2)$ имеют общую прямую.

Аналогичным образом можно показать следующее. Если $rang\left\|\lambda_i^{p+k}\right\| = p-r$, то плоскости $N_p(x_2)$ и $\widetilde{N}_p(x_2)$ имеют $r-$ мерное пересечение.

Таким образом, получается следующая

Теорема 3. *Если плоскости* $N_p(x_1)$ *и* $\widetilde{N}_p(x_1)$ *имеют общее* $r-$ *мерное пересечение, то и плоскости* $N_p(x_2)$ *и* $\widetilde{N}_p(x_2)$ *также имеют* $r-$ *мерное пересечение.*

Если линейно-независимые формы ω^i определяют в области $\Omega \subset V_p$ некоторую сеть Σ_p, то, в силу уравнения (7), эти же формы определяют в $\overline{\Omega} \subset \overline{V_p}$ сеть $\overline{\Sigma}_p = T(\Sigma_p)$. Пусть Σ_p^* – сеть, соответствующая на графике заданной сети $\Sigma_p \subset V_p$ и $\overline{\Sigma}_p = T(\Sigma_p) \subset \overline{V}_p$.

С линейной-независимостью квадратичных форм $\phi^{p+k} (k = \overline{1, p})$ связаны векторы:

$$\vec{a}_{ij} = a_{ij}^{p+k} \vec{e}_{p+k}, \vec{b}_{ij} = b_{ij}^{p+k} \vec{e}_{n+p+k}, \tag{24}$$

$$c_{ij} = c_{ij}^{p+k} (\vec{e}_{p+k} + \lambda_k^{n+i} \vec{e}_{2p+i} + \lambda_k^{n+p+i} \vec{e}_{n+p+i}), \tag{25}$$

где значения λ_i^{n+k} и λ_i^{n+p+k} удовлетворяют еще и следующим конечным соотношениям:

$$a_{ij}^{p+k} = \lambda_s^{n+k} c_{ij}^{p+s}, b_{ij}^{p+k} = \lambda_s^{n+p+k} c_{ij}^{p+s} \quad (i \neq j). \tag{26}$$

Из (24), (25) и (26) следует:

Теорема 4. *Для того, чтобы три сети Σ_p, $\overline{\Sigma}_p = T(\Sigma_p)$ и $\Sigma_p^* \subset V_p^*$ были сопряжены необходимо и достаточно, чтобы одна из них была сопряжена.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств, Учен. Зап. МГПИ им. В.И.Ленина, т. 1, № 374, (1970), стр. 41-45.
2. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. Литов. Матем. Сб., 34, (1966), стр. 475-491.
3. Алиев Н.Я. Об отображении поверхностей коразмерности два евклидовых пространств. Геометрия погруженных многообразий. Москва, (1981), стр. 3-5.
4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. Итоги науки ВИНИТИ АН СССР, Геометрия 1963, Москва, 1965.

EVKLİD FƏZALARINDA SƏTHLƏRİN DİFERENSİALLANAN İNİKASININ HƏNDƏSƏSİNƏ DAİR

N.Y.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə n - ölçülü Evklid fəzalarının p - ölçülü səthləri arasında qarşılıqlı birqiymətli diferensiallanan inikasının həndəsəsi öyrənilir.

ON THE GEOMETRY OF DIFFERENTIABLE MAPPING IN EUCLIDEAN SPACES

N.Y.ALIYEV

SUMMARY

In the paper the geometry of differentiable one-to-one mapping of p – dimensional surfaces of n – dimensional Euclidean spaces studied.